

Formale Mehrkanal-Streutheorie

Eine Alternativ-Formulierung

Von GERALD GRAWERT *

Institut für Theoretische Physik der Universität Göttingen

und JOACHIM PETZOLD

Institut für Theoretische Physik der Universität Heidelberg

(Z. Naturforsch. 15 a, 311—319 [1960]; eingegangen am 23. Januar 1960)

An alternative formulation is presented of the formal theory of multi-channel scattering in non-relativistic quantum mechanics. We start by defining spaces of state vectors, where two particles either stay together or separate in the limit $t \rightarrow +\infty$ (or $-\infty$), when the state vector develops in time by e^{-iHt} (H is the complete HAMILTONIAN of the n -particle system). A channel is defined as a space of state vectors with the following property: Developing in time by e^{-iHt} they asymptotically describe a state of the n -particle system, where the particles are grouped in fragments. Defining a HAMILTONIAN H_i for each channel, in which—compared to H —the interactions acting between particles from different fragments are missing, it is physically plausible that $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iH_i t} e^{-iHt} \Psi$ exists for vectors Ψ in the channel. Having discussed the limit vectors (asymptotic states), the S -matrix formalism can be introduced as usual. Finally the introduction of the exclusion principle is discussed.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit hat JAUCH¹ eine mathematisch strenge S -Matrix-Theorie für die Streuung eines Teilchens an einem äußeren Potential gegeben. An die Spitze der formalen Theorie werden zwei Postulate gestellt, denen das Streusystem genügen muß, damit eine vernünftige S -Matrix existiert:

I. $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t} f = f_{\pm}$ existiert für alle normierten HILBERT-Raumvektoren f .

II. Menge der f_+ \equiv Menge der $f_- \equiv$ Unterraum zum kontinuierlichen Spektrum des HAMILTON-Operators H .

Dies bedeutet, daß in mathematisch strenger Weise (für Wellenpakete!) die Existenz der MÖLLERSchen Wellen-Operatoren gefordert wird, die (weniger streng formuliert) die ebenen Wellen auf die Streuzustände abbilden. KURODA² ist der Nachweis gelungen, daß unter gewissen Voraussetzungen an das Potential die Eigenschaften I und II beweisbar werden.

In einer zweiten Arbeit hat JAUCH³ sich mit dem mathematisch strengen Aufbau der Mehrkanal-Streutheorie befaßt, wiederum ausgehend von gewissen Postulaten an das Streusystem (Verallgemeinerun-

gen von I und II). Die Aufgabe, hinreichende Voraussetzungen an die Wechselwirkungen zu finden, unter denen diese Postulate entsprechend beweisbar werden, ist ungleich schwieriger und bisher nicht gelöst⁴!

Daher erscheint uns das Studium von Alternativen zur JAUCHschen Formulierung der Mehrkanal-Streutheorie sinnvoll. Die vorliegende Note soll eine Alternativ-Formulierung geben, die auf die nicht-relativistische Quantenmechanik eines Systems von n Teilchen zugeschnitten ist⁵.

Angenommen wird die Existenz eines HAMILTON-Operators für das n -Teilchen-Problem, der sich schreiben läßt als Summe der kinetischen Energien T_i der n Teilchen plus Summe von Wechselwirkungspotentialen V_{ij} zwischen zwei Teilchen plus Dreikörperkräften usw.

$$H = \sum_{i=1}^n T_i + \sum_{i < j=1}^n V_{ij} + \sum_{i,j,k} V_{ijk} + \dots \quad (1)$$

(Physikalisch sei bei den n Teilchen an Nukleonen gedacht.)

Die zeitliche Entwicklung von Zuständen ist dann (im SCHRÖDINGER-Bild) durch e^{-iHt} bestimmt. Phy-

* Jetzt am Institut für Theoretische Physik der Universität Frankfurt/Main.

¹ J. M. JAUCH, *Helv. Phys. Acta* **31**, 127 [1958].

² S. T. KURODA, *Nuovo Cim.* **12**, 431 [1959]. Teilergebnisse siehe bei J. M. COOK, *J. Math. and Phys.* **36**, 81 [1957] und bei J. M. JAUCH u. J. J. ZINNES, *Nuovo Cim.* **11**, 553 [1959].

³ J. M. JAUCH, *Helv. Phys. Acta* **31**, 661 [1958].

⁴ Teilergebnisse siehe bei M. N. HACK, *Nuovo Cim.* **13**, 231 [1959].

⁵ Die JAUCHsche Formulierung ist so gehalten, daß sie auch in einer Quantenfeldtheorie anwendbar sein sollte. Wir wollen jedoch nur den bezeichneten Fall betrachten und für diesen eine Alternative zur JAUCHschen Diskussion geben.



sikalisch entwickeln sich gewisse Zustände nun so, daß für große Zeiten die n Teilchen auseinanderlaufende Gruppen von Atomkernen bilden. Diese anschauliche Vorstellung soll im § 1 zunächst mathematisch schärfer gefaßt und zur Definition von Kanälen herangezogen werden. Unter einem Kanal wird in dieser Arbeit dann ein Unterraum von Zuständen verstanden, die in der Zeitveränderlichkeit e^{-iHt} anschaulich eben ein asymptotisch auseinanderlaufendes System von bestimmten Atomkernen beschreiben. Die n Teilchen seien (in den §§ 1–3) zunächst als unterscheidbar gedacht.

Im § 2 werden dann die verallgemeinerten MØLLER-Operatoren eingeführt, oder genauer, deren HERMITESCH konjugierte, weil wir die Zeitabhängigkeit e^{-iHt} (und nicht eine Abhängigkeit e^{-iH_0t}) als primär gegeben an die Spitze stellen. Der auf dieser Grundlage sich ergebende S-Matrix-Formalismus wird im § 3 skizziert. Die hier auftretenden Formeln sind bekannt⁶. An die Stelle einer einzigen S-Matrix tritt in der Mehrkanal-Streutheorie ein Satz von S-Matrizen, die je Übergänge zwischen zwei Kanälen beschreiben⁷.

Schließlich soll der § 4 zeigen, daß die Berücksichtigung des PAULI-Prinzips ohne Schwierigkeiten bei diesen formalen Überlegungen durch eine nachträgliche Antisymmetrisierung erreicht werden kann.

1. Die Kanäle

Es soll also von der physikalischen Gegebenheit ausgegangen werden, daß bei einem Streuvorgang vor und nach der Reaktion die Nukleonen in gewissen Gruppierungen, als Atomkerne, beobachtet werden. Ein Zustand, der vor der Streuung experimentell hergestellt (bzw. nach der Streuung gemessen) wird, ist dadurch zu charakterisieren, daß asymptotisch für $t \rightarrow -\infty$ (bzw. $t \rightarrow +\infty$) gewisse Nukleonen (je als Kerne) zusammenbleiben.

Wir wollen deshalb mit einer mathematischen Definition des Zusammenbleibens und des Auseinanderlaufens zweier Teilchen beginnen. Zunächst seien Projektions-Operatoren D_R^{jk} eingeführt durch⁸

$$D_R^{jk} \Psi(r_1, r_2, \dots, r_n) = \begin{cases} \Psi(r_1, r_2, \dots, r_n) & \text{für } |r_j - r_k| \leq R, \\ 0 & \text{für } |r_j - r_k| > R. \end{cases} \quad (2)$$

Der Ausdruck $\|D_R^{jk} e^{-iHt} \Psi\|^2 / \|\Psi\|^2$ bedeutet physikalisch die Wahrscheinlichkeit, zur Zeit t die beiden Teilchen j und k in einem Abstand kleiner

als R zu finden, wenn zur Zeit Null der Zustand Ψ vorgelegen hat.

Wenn nun für alle R diese Wahrscheinlichkeit mit wachsendem t gegen Null geht, so bedeutet dies ein Auseinanderlaufen der beiden Teilchen j und k bei der zeitlichen Entwicklung des Zustandes Ψ . Wir führen daher ein:

$$\mathfrak{N}_{jk}^\pm = \text{Menge aller Vektoren } \Psi \text{ des HILBERT-Raums, für die } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|D_R^{jk} e^{-iHt} \Psi\| = 0 \quad (3)$$

für alle R gilt.

Wenn dagegen ein Zusammenbleiben der Teilchen j und k in der zeitlichen Entwicklung des Zustands Ψ vorliegen soll, so muß auch bei beliebig großen Zeiten die Zustandsfunktion $e^{-iHt} \Psi$ für große Abstände der beiden Teilchen verschwinden. Wir definieren:

$$\mathfrak{M}_{jk}^\pm = \text{Menge aller } \Psi, \text{ für die gilt:}$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $R(\varepsilon)$, so daß für alle $t > 0$ ($t < 0$)

$$\|D_{R(\varepsilon)}^{jk} e^{-iHt} \Psi\| > (1 - \varepsilon) \|\Psi\| \text{ ist.} \quad (4)$$

Ohne Schwierigkeiten läßt sich zeigen, daß die beiden Mengen \mathfrak{M}_{jk}^+ und \mathfrak{N}_{jk}^+ (und ebenso \mathfrak{M}_{jk}^- und \mathfrak{N}_{jk}^-) zwei zueinander orthogonale Unterräume des HILBERT-Raums \mathfrak{H} sind (Beweis siehe Anhang).

Von einer vernünftigen Definition der beiden Begriffe des Zusammenbleibens und Auseinanderlaufens wird man folgende Relationen erwarten:

- a) Wenn die Teilchen j und k einerseits sowie k und l andererseits zusammenbleiben, dann muß ein Zustand vorliegen, in dem auch j und l zusammenbleiben.
- b) Wenn j und k zusammenbleiben, dagegen k und l auseinanderlaufen, dann müssen auch j und l auseinanderlaufen. In der Tat lassen sich für die beiden in (2) und (3) definierten Unterräume zeigen (siehe Anhang):

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{jk}^\pm \cap \mathfrak{M}_{kl}^\pm &\subset \mathfrak{M}_{jl}^\pm, \\ \mathfrak{M}_{jk}^\pm \cap \mathfrak{N}_{kl}^\pm &\subset \mathfrak{N}_{jl}^\pm. \end{aligned} \quad (5 \text{ a, b})$$

Physikalisch plausibel ist es nun anzunehmen, daß durch Superposition von Zuständen aus \mathfrak{M}_{jk}^+ und aus \mathfrak{N}_{jk}^+ – oder auch aus \mathfrak{M}_{jk}^- und aus \mathfrak{N}_{jk}^- – bereits alle möglichen Zustände des Streusystems

⁶ Siehe JAUCH (I. c. ^{1, 3}) u. H. EKSTEIN, Phys. Rev. **101**, 880 [1956].

⁷ Vgl. dazu die ausführliche Diskussion bei EKSTEIN, I. c. ⁶.

⁸ Die Spinvariablen sind in dieser Definitionsformel unterdrückt worden.

gegeben sind. Oder anders formuliert: Eine physikalisch sinnvolle Theorie der Streuvorgänge wird sich wohl nur dann aufbauen lassen, wenn das Genannte gilt. Wir wollen daher fordern

$$\text{Es gilt } \mathfrak{M}_{jk}^{\pm} \oplus \mathfrak{N}_{jk}^{\pm} = \mathfrak{H} \text{ für alle Paare } j, k. \quad (\text{I})$$

Der weitere Vorgang, der zur Definition der Kanäle führt, also der Zustände, die asymptotisch auseinander laufende Kerne beschreiben, liegt nach dem Vorhergehenden auf der Hand.

Aus den n Teilchen sei zunächst eine Teilmenge von k Teilchen $F = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, herausgegriffen. Ein Zustand Ψ_F , in dem asymptotisch für $t \rightarrow +\infty$ (bzw. $-\infty$) die Teilchen in einem „Fragment“ beieinander bleiben, muß ein Zustand sein, in dem jedes Teilchenpaar i_μ, i_ν asymptotisch zusammen bleibt. Er muß also im Durchschnitt aller $\mathfrak{M}_{i_\mu, i_\nu}^{\pm}$ liegen. Wegen (5a) können wir für den Raum \mathfrak{M}_F^{\pm} aller Zustände Ψ_F^{\pm} schreiben

$$\mathfrak{M}_F^{\pm} = \mathfrak{M}_{i_1 i_2}^{\pm} \cap \mathfrak{M}_{i_1 i_3}^{\pm} \cap \dots \cap \mathfrak{M}_{i_1 i_k}^{\pm}. \quad (\text{6})$$

Werden die n Teilchen in l verschiedene Gruppen F_λ aufgeteilt und fragen wir nach Zuständen, in denen asymptotisch die Teilchen jeder der Gruppen jeweils zusammen bleiben, so ist jetzt der Durchschnitt der $\mathfrak{M}_{F_\lambda}^{\pm}$ zu bilden. Zu diesem Durchschnitt gehören neben Zuständen, in denen asymptotisch z. B. die beiden Fragmente F_1 und F_2 auseinander laufen, aber auch Zustände, bei denen F_1 und F_2 asymptotisch zusammen bleiben.

Als Kanal $\mathfrak{R}_\gamma^{\pm}$ sei daher schließlich definiert

$$\mathfrak{R}_\gamma^{\pm} = \left\{ \bigcap_{\lambda=1}^l \mathfrak{M}_{F_\lambda}^{\pm} \right\} \cap \left\{ \bigcap_{\lambda, \mu} \mathfrak{N}_{\lambda, \mu}^{\pm} \right\} \quad (\text{7})$$

wo λ bzw. μ jeweils ein Teilchen aus F_λ bzw. F_μ ($\lambda \neq \mu$) ist und γ eine Abkürzung für die Gruppierung der n Nukleonen in Fragmenten F_λ ist.

Beachten wir zur Interpretation die Relation (5b), so ergibt sich: Ein Kanal \mathfrak{R}_γ^+ (bzw. \mathfrak{R}_γ^-) ist ein Unterraum von Zuständen des HILBERT-Raums, in denen das System mit der zeitlichen Entwicklung nach e^{-iHt} asymptotisch für $t \rightarrow +\infty$ (bzw. $t \rightarrow -\infty$) l auseinanderlaufende Gruppen von Nukleonen F_1, \dots, F_l bildet.

Nach Konstruktion stehen Kanäle zu verschiede-

nen γ (aber mit gleichem Index $+$ oder $-$) orthogonal zueinander. Mit Hilfe der Relationen (I) läßt sich ferner zeigen, daß jeder Zustand sich als eine Superposition von Zuständen aus den Kanälen \mathfrak{R}_γ^+ (und ebenso von Zuständen aus den \mathfrak{R}_γ^-) schreiben läßt. Das heißt

$$\sum_\gamma \oplus \mathfrak{R}_\gamma^{\pm} = \mathfrak{H}, \quad (\text{8})$$

die Kanäle mit dem Index $+$ (und ebenso mit $-$) bilden ein vollständiges System von Teilräumen des HILBERT-Raums. Übrigens sind (I) und (8) äquivalent. (Beweis im Anhang.) Statt I könnten wir also auch die Vollständigkeit der Kanäle fordern.

Die physikalische Fragestellung nach Streuwahrscheinlichkeiten ist jetzt wie folgt zu formulieren: Gegeben ein Zustand Ψ aus einem Kanal \mathfrak{R}_γ^- , der also für sehr kleine Zeiten ($t \rightarrow -\infty$) die experimentell hergestellte Situation beschreibt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt dieser Zustand in irgendeinem Kanal $\mathfrak{R}_{\gamma'}^+$?

2. Asymptotische Zustände

Betrachten wir einen Zustand Ψ aus einem Kanal \mathfrak{R}_γ^+ , so ist es physikalisch plausibel anzunehmen, daß asymptotisch für $t \rightarrow +\infty$ diejenigen Wechselwirkungen praktisch ausgeschaltet werden, in die Teilchen aus verschiedenen „Fragmenten“ F_λ eingehen. Für große Zeiten sollte die unitäre Transformation e^{-iHt} praktisch nur noch wie ein $e^{-iH_\gamma t}$ wirken, wobei in H_γ alle bezeichneten Wechselwirkungen fehlen.

Präziser: Wir führen ein:

$$H_F = \sum_{i \in F} T_i + \sum_{i, j \in F} V_{ij} + \sum_{i, j, k \in F} V_{ijk} + \dots, \quad (\text{9})$$

$$H_\gamma = \sum_{\lambda=1}^l H_{F_\lambda}, \quad V_\gamma = H - H_\gamma. \quad (\text{10})$$

Wir fordern für alle γ :

$$\text{Für jedes } \Psi \in \mathfrak{R}_\gamma^{\pm} \text{ existiert} \\ \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iH_\gamma t} e^{-iHt} \Psi \quad (\text{II})$$

(im Sinn der starken Vektorkonvergenz im HILBERT-Raum)^{9, 10}.

Matrix, (genauer des hermiteschen konjugierten Ausdrucks). Nur wenn (II) erfüllt ist, dürfte sich eine sinnvolle Mehrkanal-Streutheorie aufbauen lassen.

¹⁰ Mathematisch brauchten wir (II) nur für eine in \mathfrak{R}_γ dichte Menge von Vektoren zu fordern. Aus dieser schwächeren Forderung ließe sich dann die volle Aussage (II) ableiten.

⁹ Diese Forderung liegt auch nahe, wenn man an die Situation in der Theorie der Streuung eines Teilchens an einem festen Potential und die in diesem Fall übliche Einführung der MÖLLER-Matrix denkt. Siehe z. B. JAUCH^{1, 2, 3}. Forderung (II) bedeutet nichts anderes als eine Verallgemeinerung der Forderung nach Existenz der MÖLLER-

Die Einführung zweier linearer Operatoren W_γ^\pm mit den Eigenschaften ¹¹

$$W_\gamma^\pm \Psi = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iH_\gamma t} e^{-iHt} \Psi \quad \text{für } \Psi \in \mathfrak{R}_\gamma^\pm, \quad (11)$$

$$W_\gamma^\pm \Psi = 0 \quad \text{für } \Psi \text{ orthogonal zu } \mathfrak{R}_\gamma^\pm$$

liegt nun nahe. W_γ^+ (bzw. W_γ^-) bildet \mathfrak{R}_γ^+ (bzw. \mathfrak{R}_γ^-) isometrisch auf einen anderen Teilraum des HILBERT-Raums ab, der mit \mathfrak{B}_γ^+ (\mathfrak{B}_γ^-) bezeichnet sei ¹².

Aus (II) folgt nun

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \{e^{-iHt} \Psi - e^{-iH_\gamma t} W_\gamma^\pm \Psi\} = 0 \quad (12)$$

für jedes $\Psi_\gamma^\pm \in \mathfrak{R}_\gamma^\pm$. Jedem $\Psi \in \mathfrak{R}_\gamma^+$ wird somit ein Vektor $\Phi = W_\gamma^\pm \Psi \in \mathfrak{B}_\gamma^\pm$ zugeordnet, der nur noch mit einer durch den HAMILTON-Operator H_γ bestimmten Zeitabhängigkeit variiert wird.

Es wird also sinnvoll sein, einmal alle Zustände aufzusuchen, die bei der Zeitabhängigkeit $e^{-iH_\gamma t}$ ein System von auseinanderlaufenden Kernen F_1, F_2, \dots, F_l beschreiben.

Dazu diskutieren wir zunächst (in sehr formaler Weise) die Eigenzustände eines [nach (9) eingeführten] Operators H_F . Es seien in F mindestens zwei Teilchen enthalten. Wir separieren die Schwerpunktsbewegung des „Fragments“ F ab.

$$\mathfrak{p}_F = \sum_{i \in F} \mathfrak{p}_i, \quad M_F = \sum_{i \in F} m_i, \quad (13)$$

$$H_F = T_F + \tilde{H}_F = \frac{\mathfrak{p}_F^2}{2M_F} + \tilde{H}_F$$

Der Operator \tilde{H}_F wird (im allgemeinen) ein diskretes Spektrum und ein kontinuierliches Spektrum haben. Die diskreten Energiewerte $E_{F,\varrho}$ entsprechen genau den gebundenen Zuständen, den verschiedenen Niveaus des Atomkerns F ; die zugehörigen normierten Eigenfunktionen seien durch $\chi_{F,\varrho,\sigma}$ bezeichnet, wo σ eine eventuelle Vielfachheit durchnummeriert.

$$\tilde{H}_F \chi_{F,\varrho,\sigma} = E_{F,\varrho} \chi_{F,\varrho,\sigma}. \quad (14)$$

Aus dem vollen HILBERT-Raum \mathfrak{H}_F aller Zustände der in F enthaltenen Teilchen, mit dem HAMILTON-Operator H_F , greifen wir den Unterraum heraus, der

von den Funktionen $\exp \{i \vec{K}_F \cdot \vec{R}_F\} \chi_{F,\varrho,\sigma}$ (für alle Schwerpunktsimpulse \vec{K}_F bei festem ϱ und σ) aufgespannt wird; er sei mit $\mathfrak{B}(F, \varrho, \sigma)$ bezeichnet. Definiert sei ferner

$$\mathfrak{B}_F = \sum_{\varrho, \sigma} \mathfrak{B}(F, \varrho, \sigma). \quad (15)$$

Der HILBERT-Raum \mathfrak{H}_F muß sich aufspalten lassen in

$$\mathfrak{H}_F = \mathfrak{B}_F \oplus \mathfrak{A}_F. \quad (16)$$

Die physikalische Interpretation der so eingeführten Räume ist klar.

Existieren keine gebundenen Zustände zu F , hat also \tilde{H}_F ein rein kontinuierliches Spektrum, so ist natürlich $\mathfrak{H}_F \equiv \mathfrak{A}_F$ und \mathfrak{B}_F leer.

Die vorstehenden Definitionen sollten für Mengen F mit mehr als einem Teilchen gelten, wo die Frage nach gebundenen Fragmenten sinnvoll ist. Im Fall $F = \{i\}$, wo i irgendeines der n Teilchen ist, „entartet“ (9) natürlich zu

$$H_F = T_i. \quad (9')$$

Eine Aufspaltung des HILBERT-Raums \mathfrak{H}_F analog (16) existiert selbstverständlich nicht. Es ist für das Folgende zweckmäßig, für diesen Fall $F = \{i\}$

$$\mathfrak{H}_F \equiv \mathfrak{B}_F \quad (16')$$

zu definieren.

Die Definition des Raumes \mathfrak{B}_F ist also so gewählt, daß Energie-Eigenzustände in \mathfrak{B}_F stets durch genau einen Impulsvektor \vec{K} (Schwerpunktsimpuls des Fragments bzw. Impuls des einzelnen Teilchens) und eventuelle weitere diskrete Parameter charakterisiert sind.

Den vollen HILBERT-Raum \mathfrak{H} des n -Teilchen-Problems können wir bei beliebiger Gruppierung $\gamma = (F_1, F_2, \dots, F_l)$ der Nukleonen zu Atomkernen selbstverständlich als Produktraum

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{F_1} \times \mathfrak{H}_{F_2} \times \dots \times \mathfrak{H}_{F_l} \quad (17)$$

konstruieren. Aus \mathfrak{H} greifen wir nun folgende Unterräume heraus:

$$\mathfrak{B}(\gamma; \varrho_l, \sigma_l) = \mathfrak{B}(F_1, \varrho_1, \sigma_1) \times \mathfrak{B}(F_2, \varrho_2, \sigma_2) \times \dots \times \mathfrak{B}(F_l, \varrho_l, \sigma_l), \quad (18)$$

¹¹ Die Operatoren W_γ^\pm entsprechen den Operatoren $\Omega_\pm^{(\gamma)*}$ bei JAUCH ^{1, 3}.

¹² Bei der Streuung eines Teilchens an einem äußeren Potential treten als \mathfrak{B}^\pm Räume von Wellenpaketen auf, die aus freien ebenen Wellen aufgebaut sind. In diesem Fall for-

dert man für eine vernünftige Streutheorie dann $\mathfrak{B}^+ = \mathfrak{B}^- = \mathfrak{H}$. Siehe z. B. JAUCH ^{1, 2, 3}. Wir haben uns im folgenden mit der Verallgemeinerung dieser Forderung für den Mehrkanalfall zu beschäftigen.

$$\mathfrak{B}_\gamma = \mathfrak{B}_{F_1} \times \mathfrak{B}_{F_2} \times \dots \times \mathfrak{B}_{F_l}, \quad (19)$$

wobei natürlich

$$\mathfrak{B}_\gamma = \sum_{\varrho_\lambda, \sigma_\lambda} \oplus \mathfrak{B}(\gamma; \varrho_\lambda, \sigma_\lambda) \quad (20)$$

gilt.

Betrachten wir nun die Transformation $e^{-iH_\gamma t}$ im HILBERT-Raum \mathfrak{H} , so ist es klar, daß in \mathfrak{B}_γ genau diejenigen Zustände liegen, die für diese Zeitveränderlichkeit ein System von auseinanderlaufenden Kernen F_1, F_2, \dots, F_l beschreiben. (In diesem Fall brauchen wir auch nicht zu unterscheiden, ob wir t gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$ gehen lassen.) Sehen wir uns nun Gl. (12) an, so wird folgende dritte Forderung an eine physikalisch sinnvolle Streutheorie plausibel: Die in (11) eingeführten Operatoren W_γ^\pm bilden die Kanäle \mathfrak{R}_γ^\pm genau auf \mathfrak{B}_γ ab, also

$$\mathfrak{B}_\gamma^+ \equiv \mathfrak{B}_\gamma^- \equiv \mathfrak{B}_\gamma. \quad (III)$$

Damit sind die grundlegenden Ansätze der Mehrkanal-Streutheorie (in der hier vorgeschlagenen Neuformulierung) gewonnen. Der weitere Vorgang schließt sich eng an die älteren Formulierungen¹³ an. Wir skizzieren im folgenden § 3 noch einige Schritte.

3. Die S-Matrizen

Die oben eingeführten Räume \mathfrak{B}_γ sind im allgemeinen nicht orthogonal zueinander. Man sieht z. B. sofort, daß für den „freien“ Kanal, d. h. $\gamma = (\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\})$ der Raum \mathfrak{B}_γ gleich dem gesamten HILBERT-Raum ist. Zwar folgt mit (12) eine gewisse asymptotische Orthogonalität: Wenn $\Phi_\gamma \in \mathfrak{B}_\gamma$, $\Phi_{\gamma'} \in \mathfrak{B}_{\gamma'}$ und $\gamma \neq \gamma'$ ist, so gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (e^{-iH_\gamma t} \Phi_\gamma, e^{-iH_{\gamma'} t} \Phi_{\gamma'}) = 0.$$

Jedoch muß die Nichtorthogonalität der \mathfrak{B}_γ immer beachtet werden, wenn man wie üblich die Streuwahrscheinlichkeiten als Ausdrücke anschreibt, in die Funktionen aus den \mathfrak{B}_γ eingehen.

Aus (II) und (III) folgt, daß für alle Zustände $\Phi \in \mathfrak{B}_\gamma$ die beiden Grenzwerte

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iHt} e^{-iH_\gamma t} \Phi$$

existieren müssen. Ferner existieren HERMITESCH konjugierte Operatoren zu W_γ^\pm , und es gilt

$$W_\gamma^{\pm*} \Phi = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iHt} e^{-iH_\gamma t} \Phi \in \mathfrak{R}_\gamma^\pm \quad \text{für } \Phi \in \mathfrak{B}_\gamma,$$

$$W_\gamma^{\pm*} \Phi = 0 \quad \text{für } \Phi \perp \mathfrak{B}_\gamma. \quad (21)$$

Der Operator $W_\gamma^{\pm*}$ (W_γ^{-*}) bildet den Raum \mathfrak{B}_γ auf \mathfrak{R}_γ^+ (\mathfrak{R}_γ^-) ab.

Die Zerlegung (20) des Raums der asymptotischen Zustände führt bei Anwendung der Operatoren W_γ^\pm zu einer Zerlegung der Kanäle \mathfrak{R}_γ^\pm in „Unterkanäle“.

In $W_\gamma^\pm \mathfrak{B}(\gamma; \varrho_\lambda, \sigma_\lambda)$ liegen genau alle Zustände, die sich als ein System von asymptotisch auseinanderlaufenden Kernen in bestimmten (durch $\varrho_\lambda, \sigma_\lambda$ charakterisierten) inneren Zuständen interpretieren lassen.

Für die Vertauschung der unitären Operatoren, die die zeitliche Entwicklung von Zuständen angeben, mit den Wellenoperatoren zeigt man leicht¹⁴

$$W_\gamma^{\pm*} e^{iH_\gamma \tau} = e^{iH\tau} W_\gamma^{\pm*}. \quad (22)$$

Da der Definitionsbereich des HAMILTON-Operators H_γ in \mathfrak{B}_γ dicht liegen muß, folgt mit Hilfe von (22) sofort, daß der Definitionsbereich von H in den Kanälen \mathfrak{R}_γ^\pm dicht liegt, und wir können schreiben

$$W_\gamma^{\pm*} H_\gamma = H W_\gamma^{\pm*}. \quad (23)$$

Die S-Matrix, die einen Übergang von einem asymptotischen Zustand in $\mathfrak{B}_{\gamma'}$ zu einem Zustand in \mathfrak{B}_γ beschreibt, ist schließlich durch die Operator-Gleichung

$$S_{\gamma\gamma'} = W_\gamma^+ W_{\gamma'}^{-*} \quad (24)$$

gegeben. Für jede mögliche Reaktion, die symbolisch $\gamma \rightarrow \gamma'$ geschrieben sei, wird also durch (24) eine S-Matrix definiert. Wegen der Nichtorthogonalität der \mathfrak{B}_γ muß man darauf achten, daß Matrixelemente von $S_{\gamma\gamma'}$ nur für die Reaktion $\gamma \rightarrow \gamma'$ einen physikalischen Sinn haben.

Wir führen diesen Schritt noch etwas näher aus für Eigenvektoren der HAMILTON-Operatoren H_γ , also nichtnormierbare Zustände jetzt¹⁵.

Im Raum \mathfrak{B}_γ können wir nach der Konstruktion im § 2 z. B. folgendes vollständige, auf δ -Funktionen „orthonormierte“ System von Eigenvektoren zum HAMILTON-Operator H_γ einführen:

$$\varphi_\gamma(\vec{K}_\lambda, \varrho_\lambda, \sigma_\lambda) = \prod_{\lambda=1}^l \exp(i \vec{K}_\lambda \cdot \vec{R}_\lambda) \chi_{F_\lambda, \varrho_\lambda, \sigma_\lambda}(2\pi)^{-3l/2}, \quad (25 a)$$

wo \vec{K}_λ der Schwerpunktsimpuls des Kernels F_λ ist, \vec{R}_λ seine Schwerpunktskoordinaten sind und χ den inneren Zustand des Fragments beschreibt¹⁶. [Vgl. (14) und die Bemerkungen vor dieser Gleichung.]

Definieren wir

$$\varphi_\gamma^\pm(\vec{K}_\lambda, \varrho_\lambda, \sigma_\lambda) = W_\gamma^{\pm*} \varphi_\gamma(\vec{K}_\lambda, \varrho_\lambda, \sigma_\lambda), \quad (25 b)$$

¹³ JAUCH^{1,3}, EKSTEIN⁶, siehe auch W. BREINIG u. R. HAAG, Fortschr. der Physik 7, 183 [1959].

¹⁴ Siehe JAUCH^{1,2,3}.

¹⁵ Vgl. zum folgenden EKSTEIN⁶, BREINIG u. HAAG¹³.

¹⁶ In $\varphi_\gamma(\vec{K}_\lambda, \varrho_\lambda, \sigma_\lambda)$ steht also \vec{K}_λ für die $3l$ Impulskoordinaten der Atomkerne usf.; $d^3\vec{K}_\lambda$ bedeutet

$$d^3\vec{K}_1 d^3\vec{K}_2 \dots d^3\vec{K}_l.$$

so gewinnen wir mit den ψ_γ^\pm vollständige, „orthonormierte“ Systeme von Eigenvektoren zum vollen HAMILTON-Operator H in den Kanälen \mathfrak{R}_γ^\pm .

Jeder Zustand Ψ des HILBERT-Raums \mathfrak{H} muß sich eindeutig zerlegen lassen nach ¹⁶

$$\begin{aligned}\Psi &= \sum_\gamma \sum_{\varrho_\lambda, \sigma_\lambda} \int d^3 \vec{K}_\lambda c_\gamma^+ (\vec{K}_\lambda, \varrho_\lambda, \sigma_\lambda) \psi_\gamma^+ (\vec{K}_\lambda, \varrho_\lambda, \sigma_\lambda) \\ &= \sum_\gamma \sum_{\varrho_\lambda, \sigma_\lambda} \int d^3 \vec{K}_\lambda c_\gamma^- (\vec{K}_\lambda, \varrho_\lambda, \sigma_\lambda) \psi_\gamma^- (\vec{K}_\lambda, \varrho_\lambda, \sigma_\lambda)\end{aligned}\quad (26)$$

Die c^- charakterisieren z. B. die physikalischen Anfangsbedingungen, den Zustand vor der Streuung. Der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten c^+ und c^- wird durch die Matrixelemente von (24) gegeben:

$$c_\gamma^+ (K_\lambda, \varrho_\lambda, \sigma_\lambda) = \sum_{\gamma'} \sum_{\varrho'_\lambda, \sigma'_\lambda} \int d^3 \vec{K}'_\lambda S_{\gamma\gamma'} (\vec{K}_\lambda, \varrho_\lambda, \sigma_\lambda; \vec{K}'_\lambda, \varrho'_\lambda, \sigma'_\lambda) c_{\gamma'}^- (\vec{K}'_\lambda, \varrho'_\lambda, \sigma'_\lambda). \quad (27)$$

Denn man leitet ohne Schwierigkeiten ab, daß für die Matrixelemente in (27) folgende Ausdrücke angeschrieben werden können:

$$S_{\gamma\gamma'} (\vec{K}_\lambda, \varrho_\lambda, \sigma_\lambda; \vec{K}'_\lambda, \varrho'_\lambda, \sigma'_\lambda) = (\psi_\gamma^+ (\vec{K}_\lambda, \varrho_\lambda, \sigma_\lambda), \psi_{\gamma'}^- (\vec{K}'_\lambda, \varrho'_\lambda, \sigma'_\lambda)) = (\varphi_\gamma (\vec{K}_\lambda, \varrho_\lambda, \sigma_\lambda), W_\gamma^+ W_{\gamma'}^{-*} \varphi_{\gamma'} (\vec{K}'_\lambda, \varrho'_\lambda, \sigma'_\lambda)). \quad (28)$$

Die folgenden Unitaritäts-Relationen gelten für die S -Matrix

$$\sum_{\gamma', \varrho', \sigma'} \int d^3 \vec{K}'_\lambda S_{\gamma\gamma'} (\vec{K}_\lambda, \varrho_\lambda, \sigma_\lambda; \vec{K}'_\lambda, \varrho'_\lambda, \sigma'_\lambda) S_{\gamma''\gamma'}^* (\vec{K}_\lambda, \varrho_\lambda, \sigma_\lambda; \vec{K}'_\lambda, \varrho'_\lambda, \sigma'_\lambda) = \delta_{\gamma\gamma''} \delta(\vec{K}_\lambda - \vec{K}'_\lambda) \delta_{\varrho\varrho'} \delta_{\sigma\sigma'}. \quad (29)$$

Als Operator-Gleichung geschrieben, lautet (29):

$$\sum_{\gamma'} S_{\gamma\gamma'} S_{\gamma''\gamma'}^* = \sum_{\gamma'} W_\gamma^+ W_{\gamma'}^{-*} W_{\gamma'}^+ W_{\gamma''}^{-*} = W_\gamma^+ W_{\gamma''}^{-*} = \delta_{\gamma\gamma''} P(\mathfrak{B}_\gamma), \quad (29a)$$

wo $P(\mathfrak{B}_\gamma)$ der Projektions-Operator auf den Raum \mathfrak{B}_γ ist. [Beachte (11) und (21).]

Da aus der Existenz des Limes

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{iH_\gamma t} e^{-iHt} \Psi$$

sofort auch die Existenz des (ABELSchen) Grenzwertes

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^\infty e^{iH_\gamma t} e^{-iHt-\varepsilon t} dt \Psi$$

und die Gleichheit der beiden Limites folgt, können wir für die Wellenoperatoren auch schreiben

$$\begin{aligned}W_\gamma^\pm &= \pm \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^\infty e^{iH_\gamma t} e^{-iHt \mp \varepsilon t} dt P(\mathfrak{R}_\gamma^\pm), \\ W_\gamma^{\pm*} &= \pm \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^\infty e^{iHt} e^{-iH_\gamma t \mp \varepsilon t} dt P(\mathfrak{B}_\gamma),\end{aligned}\quad (30)$$

wo $P(\mathfrak{R})$ jeweils der Projektionsoperator auf den Raum \mathfrak{R} ist.

Setzen wir in (25b) für $W_\gamma^{\pm*}$ den Ausdruck aus (30) ein, und führen wir die Zeitintegration formal aus, so ergibt sich

$$\psi_\gamma^\pm (\vec{K}_\lambda, \varrho_\lambda, \sigma_\lambda) = \varphi_\gamma - \frac{1}{H-E \pm i\varepsilon} V_\gamma \varphi_\gamma, \quad (31a)$$

und hieraus folgt

$$\psi_\gamma^- = \psi_\gamma^+ - 2\pi i \delta(H-E) V_\gamma \varphi_\gamma, \quad (31b)$$

$$\text{mit} \quad E = \sum_{\lambda=1}^l \left\{ \frac{\vec{K}_\lambda^2}{2M_\lambda} + E_{F\lambda, \varrho_\lambda} \right\}.$$

Gehen wir damit in den Ausdruck (28) für die S -Matrix ein, so folgt

$$S_{\gamma\gamma'} (\vec{K}_\lambda, \varrho_\lambda, \sigma_\lambda; \vec{K}'_\lambda, \varrho'_\lambda, \sigma'_\lambda) - \delta_{\gamma\gamma'} \delta(\vec{K}_\lambda - \vec{K}'_\lambda) \delta_{\varrho\varrho'} \delta_{\sigma\sigma'} = -2\pi i \delta(E' - E) (\varphi_\gamma (\vec{K}_\lambda, \varrho_\lambda, \sigma_\lambda), W_{\gamma'}^+ V_{\gamma'} \varphi_{\gamma'} (\vec{K}'_\lambda, \varrho'_\lambda, \sigma'_\lambda)) \quad (32a)$$

oder auch

$$= -2\pi i \delta(E' - E) (\varphi_\gamma (\vec{K}_\lambda, \varrho_\lambda, \sigma_\lambda), V_\gamma W_{\gamma'}^{-*} \varphi_{\gamma'} (\vec{K}'_\lambda, \varrho'_\lambda, \sigma'_\lambda)). \quad (32b)$$

4. Berücksichtigung des Pauli-Prinzips

Die Überlegungen in den §§ 1–3 setzten voraus, daß alle n Teilchen unterscheidbar sind. Es ist jedoch leicht möglich, nachträglich eine Antisymmetrisierung durchzuführen.

Wir gehen davon aus, daß es eine Gruppe \mathfrak{Q} von Permutationen Q der n Teilchen (physikalisch eine

Vertauschung von Protonen, kombiniert mit einer Vertauschung von Neutronen) gibt, die mit dem HAMILTON-Operator H vertauschbar sind. Das PAULI-Prinzip besagt, daß wir als physikalische Zustände nicht die Vektoren des bisher betrachteten HILBERT-Raums \mathfrak{H} , sondern nur die Vektoren aus demjenigen Teilraum $\hat{\mathfrak{H}}$ von \mathfrak{H} ansetzen sollen, in dem die Gruppe \mathfrak{Q} die antisymmetrische Darstellung er-

führt¹⁷. $\hat{\mathfrak{H}}$ sei also der Raum aller Zustände $\hat{\Psi}$, für die folgendes gilt:

$$Q \hat{\Psi} = (-1)^Q \hat{\Psi} \quad (33)$$

$$= \begin{cases} + \hat{\Psi} & \text{für gerade Permutation } Q, \\ - \hat{\Psi} & \text{für ungerade Permutation } Q. \end{cases}$$

Untersuchen wir jetzt einmal die Wirkung einer Permutation Q auf Zustände aus einem der Räume \mathfrak{N}_{jk} oder \mathfrak{M}_{jk} (aus § 1¹⁸). Die Permutation Q führe die beiden Teilchen j, k in j', k' über. Es folgt nun z. B. aus

$$\lim \| D_R^{jk} e^{-iHt} \Psi \| = 0$$

die Relation $\lim \| D_R^{j'k'} e^{-iHt} \{Q \Psi\} \| = 0$.

Der Operator Q führt also einen Zustand, in dem die Teilchen j und k asymptotisch auseinanderlaufen, in einen anderen Zustand über, in dem j' und k' auseinanderlaufen. Entsprechendes gilt für das Zusammenbleiben von Teilchen.

Formal können wir schreiben

$$Q \mathfrak{N}_{jk} = \mathfrak{N}_{j'k'}, \quad Q \mathfrak{M}_{jk} = \mathfrak{M}_{j'k'}. \quad (34)$$

Es folgt sofort $Q \mathfrak{R}_\gamma = \mathfrak{R}_{Q\gamma}$, (35)

worin $Q\gamma$ diejenige Fragment-Kombination bedeutet, die aus γ bei Anwenden der Permutation Q entsteht.

Nun gibt es zu jedem γ stets eine Untergruppe \mathfrak{Q}_γ von Permutationen Q aus \mathfrak{Q} , für die $Q\gamma \equiv \gamma$ ist. Und zwar gehören zu \mathfrak{Q}_γ 1. alle Permutationen, die nur innerhalb der F_λ wirken und 2. falls in γ zwei oder mehr Mengen F_λ sind, die gleiche Protonen- und Neutronenzahl enthalten, alle Permutationen, die diese Mengen F_λ miteinander vertauschen. Für alle Permutationen aus \mathfrak{Q}_γ gilt

$$Q \mathfrak{R}_\gamma \equiv \mathfrak{R}_\gamma;$$

aber auch $[Q, H_\gamma] = 0$, $Q \mathfrak{B}_\gamma \equiv \mathfrak{B}_\gamma$. (36)

Wenn Q eine Permutation ist, die nicht zu \mathfrak{Q}_γ gehört, dann unterscheidet sich $Q\gamma$ von γ nur dadurch, daß anders numerierte Nukleonen zu den „gleichen“ Kernen zusammengefaßt werden. Physikalisch beschreibt also $Q\gamma$ auch in diesem Fall „dieselben“ Kerne wie γ , eben wegen des PAULI-Prinzips.

Wir führen ein: $\hat{\mathfrak{R}}_\gamma$ = denjenigen Unterraum von \mathfrak{R}_γ , in dem \mathfrak{Q}_γ die antisymmetrische Darstellung erfährt, und

$$\hat{\mathfrak{R}}_\gamma = \left\langle \sum_Q \oplus \mathfrak{R}_{Q\gamma} \right\rangle_{\text{antisymm.}} = \left\langle \sum_Q \oplus \hat{\mathfrak{R}}_{Q\gamma} \right\rangle_{\text{antisymm.}}, \quad (37)$$

d. h. aus dem von den Kanälen $\mathfrak{R}_{Q\gamma}$ für alle Q aufgespannten Raum denjenigen Unterraum, in dem \mathfrak{Q} antisymmetrisch dargestellt wird.

Dieser Zustandsraum $\hat{\mathfrak{R}}_\gamma$ kann jetzt als antisymmetrisierter Kanal interpretiert werden. In $\hat{\mathfrak{R}}_\gamma$ liegen genau alle Zustände, die bei Beachtung des PAULI-Prinzips ein System von asymptotisch auseinanderlaufenden Kernen $\gamma = (F_1, \dots, F_l)$ beschreiben. Das Symbol γ beschreibt gegenüber früher nicht mehr eine bestimmte Aufteilung der durchnumerierten Nukleonen, sondern nur noch ein System von Kernen mit bestimmten Anzahlen von Protonen und Neutronen.

Nach Konstruktion sind die Kanäle $\hat{\mathfrak{R}}_\gamma$ orthogonal und vollständig in $\hat{\mathfrak{H}}$. Die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_\gamma \oplus \hat{\mathfrak{R}}_\gamma = \hat{\mathfrak{H}} \quad (38)$$

ist natürlich äquivalent zur Gl. (8) und damit zur Forderung (I).

Analog wird eingeführt: $\tilde{\mathfrak{B}}_\gamma$ = derjenige Unterraum von \mathfrak{B}_γ , in dem \mathfrak{Q}_γ die antisymmetrische Darstellung erfährt. Die oben eingeführten Wellenoperatoren W und W^* vermitteln nun auch die Abbildung zwischen den Räumen $\tilde{\mathfrak{R}}_\gamma$ und $\tilde{\mathfrak{B}}_\gamma$, auf Grund der Beziehungen (36):

$$W_\gamma^\pm \tilde{\mathfrak{R}}_\gamma^\pm = \tilde{\mathfrak{B}}_\gamma, \quad W_\gamma^{\pm*} \tilde{\mathfrak{B}}_\gamma = \tilde{\mathfrak{R}}_\gamma. \quad (39)$$

Zur Einführung der antisymmetrischen S -Matrizen rechnen wir zunächst wieder mit nicht-normierbaren Energie-Eigenvektoren. Ein vollständiges „orthonormiertes“ System von Eigenvektoren zu H_γ läßt sich (im Prinzip) in den Räumen $\tilde{\mathfrak{B}}_\gamma$ leicht angeben. Wir brauchen nur für die $\chi_{F, \varrho, \sigma}$ in (25 a) antisymmetrische Kerneigenfunktionen wählen und eventuell, falls in γ zwei oder mehr Mengen F_λ mit gleicher Protonen- und Neutronenzahl sind, bezüglich Permutationen dieser Kerne F_λ antisymmetrisieren.

Es sei $\tilde{\varphi}_\gamma(\vec{K}_\lambda, \varrho_\lambda, \sigma_\lambda)$

eine entsprechende Basis in $\tilde{\mathfrak{B}}_\gamma$. Dann gibt formal

$$\tilde{\psi}_\gamma^\pm(\vec{K}_\lambda, \varrho_\lambda, \sigma_\lambda) = W_\gamma^\pm \tilde{\varphi}_\gamma(\vec{K}_\lambda, \varrho_\lambda, \sigma_\lambda) \quad (40)$$

eine Basis von Eigenvektoren zu H in $\hat{\mathfrak{R}}_\gamma^\pm$ und

$$\hat{\psi}_\gamma^\pm = (z z_\gamma)^{-1/2} \sum_Q (-1)^Q Q \tilde{\psi}_\gamma^\pm \quad (41)$$

¹⁷ Das Zeichen $\hat{}$ charakterisiert im folgenden immer antisymmetrische Größen.

¹⁸ Die Indizes \pm sind im folgenden unterdrückt.

eine Basis in $\hat{\mathfrak{N}}_\gamma^\pm$. Dabei sei z die Anzahl der Permutationen in \mathfrak{Q} und z_γ die entsprechende Anzahl in \mathfrak{Q}_γ . Der Faktor $(z z_\gamma)^{-1/2}$ ist hinzugefügt, damit die $\hat{\psi}$ in gleicher Weise normiert sind wie die Funktionen $\tilde{\psi}$ und $\tilde{\varphi}$.

Jeder Zustand $\hat{\Psi}$ des HILBERT-Raums $\hat{\mathfrak{H}}$ muß sich

$$\hat{\psi}_\gamma^+(\vec{K}_\lambda, \varrho_\lambda, \sigma_\lambda) = \sum_{\gamma'} \sum_{\varrho', \sigma'} \int d^3 \vec{K}'_{\lambda'} \hat{S}_{\gamma\gamma'}(\vec{K}'_{\lambda'}, \varrho'_{\lambda'}, \sigma'_{\lambda'}) \hat{\psi}_{\gamma'}^-(\vec{K}'_{\lambda'}, \varrho'_{\lambda'}, \sigma'_{\lambda'}) \quad (43)$$

also gilt

$$\hat{S}_{\gamma\gamma'}(\vec{K}, \dots; \vec{K}'_{\lambda'}, \dots) = (\hat{\psi}_\gamma^+(\vec{K}, \dots), \hat{\psi}_{\gamma'}^-(\vec{K}'_{\lambda'}, \dots)). \quad (44)$$

Die Unitaritäts-Relationen (29) gelten auch für die \hat{S} -Matrizen¹⁹.

Setzen wir (41) ein, so folgt

$$\hat{S}_{\gamma\gamma'}(\vec{K}_\lambda, \dots; \vec{K}'_{\lambda'}, \dots) = (z_\gamma z_{\gamma'})^{-1/2} \sum_Q (-1)^Q (\tilde{\psi}_\gamma^+(\vec{K}_\lambda, \dots) Q \tilde{\varphi}_{\gamma'}^-(\vec{K}'_{\lambda'}, \dots)). \quad (45)$$

Mit den Formeln (31 a, b) für die $\tilde{\psi}_\gamma$ folgt ferner

$$\begin{aligned} \hat{S}_{\gamma\gamma'}(\vec{K}_\lambda, \varrho_\lambda, \sigma_\lambda; \vec{K}'_{\lambda'}, \varrho'_{\lambda'}, \sigma'_{\lambda'}) \\ = \delta_{\gamma\gamma'} \delta(\vec{K}_\lambda - \vec{K}'_{\lambda'}) \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\sigma\sigma'} - 2\pi i \delta(E - E') (z_\gamma z_{\gamma'})^{-1/2} \sum_Q (-1)^Q (\tilde{\varphi}(\vec{K}_\lambda, \varrho_\lambda, \sigma_\lambda), V_\gamma Q W_{\gamma'}^* \tilde{\varphi}_{\gamma'}(\vec{K}'_{\lambda'}, \varrho'_{\lambda'})) \end{aligned} \quad (46)$$

an Stelle von (32 b) zum Beispiel.

In Operator-Form können wir die antisymmetrisierten S -Matrizen nach dem Vorhergehenden also wie folgt schreiben:

$$\hat{S}_{\gamma\gamma'} = (z_\gamma z_{\gamma'})^{-1/2} P(\tilde{\mathfrak{B}}_\gamma) W_\gamma^+ \left\{ \sum_Q (-1)^Q Q \right\} W_{\gamma'}^* P(\tilde{\mathfrak{B}}_{\gamma'}). \quad (47)$$

Die Unitaritätsrelationen lauten

$$\sum_{\gamma'} \hat{S}_{\gamma\gamma'} \hat{S}_{\gamma''\gamma'}^* = \delta_{\gamma\gamma''} P(\tilde{\mathfrak{B}}_\gamma). \quad (48)$$

Anhang

Skizzierung einiger Beweise

1. Satz: Die in (3,4) definierten Mengen \mathfrak{N}_{jk} und \mathfrak{M}_{jk} sind lineare Unterräume.

Es seien $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathfrak{N}_{jk}$. Behauptung: $\Psi_1 + \Psi_2 \in \mathfrak{N}_{jk}$. Zum Beweis benutzt man die Dreiecksungleichung,

$$\begin{aligned} \lim_t \|D_R^{jk} e^{-iHt} \{\Psi_1 + \Psi_2\}\| \\ \leq \lim_t \{ \|D_R^{jk} e^{-iHt} \Psi_1\| + \|D_R^{jk} e^{-iHt} \Psi_2\| \}. \end{aligned}$$

Es sei Ψ_ν eine Vektorfolge mit $\Psi_\nu \rightarrow \Psi$ und $\Psi_\nu \in \mathfrak{N}_{jk}$. Behauptung: $\Psi \in \mathfrak{N}_{jk}$. Zum Beweis benutzt man die Ungleichung

$$\begin{aligned} \|D_R^{jk} e^{-iHt} \Psi\| &\leq \|D_R^{jk} e^{-iHt} \{\Psi - \Psi_\nu\}\| \\ &\quad + \|D_R^{jk} e^{-iHt} \Psi_\nu\| \\ &\leq \|\Psi - \Psi_\nu\| + \|D_R^{jk} e^{-iHt} \Psi_\nu\|. \end{aligned}$$

¹⁹ Man beachte die unterschiedliche Bedeutung von γ . Der Index γ an vollständig antisymmetrischen Größen, z. B. bei $\hat{S}_{\gamma\gamma'}$, bezeichnet nur noch eine Aufteilung der n Teilchen auf Fragmente mit bestimmten Teilchen-Anzahlen. Vgl. auch weiter oben.

jetzt eindeutig zerlegen lassen nach

$$\begin{aligned} \hat{\psi} &= \sum_\gamma \sum_{\varrho_\lambda, \sigma_\lambda} \int d^3 \vec{K}_\lambda \hat{c}_\gamma^+(\vec{K}_\lambda, \varrho_\lambda, \sigma_\lambda) \hat{\psi}_\gamma^+(\vec{K}_\lambda, \varrho_\lambda, \sigma_\lambda) \\ &= \sum_\gamma \sum_{\varrho_\lambda, \sigma_\lambda} \int d^3 \vec{K}_\lambda \hat{c}_\gamma^-(\vec{K}_\gamma, \varrho_\lambda, \sigma_\lambda) \hat{\psi}_\gamma^-(\vec{K}_\lambda, \varrho_\lambda, \sigma_\lambda). \end{aligned} \quad (42)$$

Die S -Matrizen sind jetzt zu definieren durch

Für die entsprechenden Überlegungen bei Vektoren aus \mathfrak{M}_{jk} betrachtet man analog den Ausdruck

$$\| \{1 - D_R^{jk}\} e^{-iHt} \Psi \|.$$

2. Beweis der Orthogonalität von \mathfrak{M}_{jk}^+ und \mathfrak{N}_{jk}^+ .

Es sei $\Psi \in \mathfrak{M}_{jk}^+, \Phi \in \mathfrak{N}_{jk}^+$. Wir schätzen ab

$$\begin{aligned} |(\Psi, \Phi)| &\leq |(e^{-iHt} \Psi, D_R^{jk} e^{-iHt} \Phi)| \\ &\quad + |(\{1 - D_R^{jk}\} e^{-iHt} \Psi, e^{-iHt} \Phi)| \\ &\leq \|\Psi\| \cdot \|D_R^{jk} e^{-iHt} \Phi\| + \|\Phi\| \cdot \|\{1 - D_R^{jk}\} e^{-iHt} \Psi\|. \end{aligned}$$

Nach den Definitionen (3,4) muß es nun ein $R(\varepsilon)$ geben, so daß der zweite Summand des letzten Ausdrucks für alle $t > 0$ kleiner als ε wird. Zu diesem $R(\varepsilon)$ muß aber für genügend große Zeiten auch der erste Summand kleiner als ε werden. Folglich muß $|(\Psi, \Phi)|$ kleiner als jede beliebige positive Schranke, also gleich Null, sein.

3. Beweis der Relationen (5 a + b)

Wir betrachten zunächst im $3n$ -dimensionalen Koordinatenraum die Gebiete

$$G_1 = \{r_v \text{ mit } |r_j - r_k| < R, |r_k - r_l| < R\}$$

$$\text{und } G_2 = \{r_v \text{ mit } |r_j - r_l| < 2R\}.$$

Offensichtlich gilt $G_1 \subset G_2$. Folglich gilt für die in (2) eingeführten Projektionsoperatoren

$$D_R^{jk} \cdot D_R^{kl} \leq D_{2R}^{jl},$$

$$1 - D_{2R}^{jl} \leq (1 - D_R^{jk}) + D_R^{jk}(1 - D_R^{kl}),$$

und für beliebige Vektoren Ψ gilt

$$\| \{1 - D_{2R}^{jl}\} e^{-iHt} \Psi \| \leq \| \{1 - D_R^{jk}\} e^{-iHt} \Psi \| + \| \{1 - D_R^{kl}\} e^{-iHt} \Psi \|.$$

Mit Hilfe dieser Ungleichung erkennt man leicht (5 a) $\mathfrak{M}_{jk} \cap \mathfrak{M}_{kl} \subset \mathfrak{M}_{jl}$.

Schreiben wir die Ungleichung in der Form

$$\| \Psi \| - \| \{1 - D_R^{jk}\} e^{-iHt} \Psi \| \leq \| \Psi \| - \| \{1 - D_{2R}^{jl}\} e^{-iHt} \Psi \| + \| \{1 - D_R^{kl}\} e^{-iHt} \Psi \|,$$

so folgert man leicht $\mathfrak{M}_{kl} \cap \mathfrak{N}_{jl} \subset \mathfrak{N}_{jk}$, also (5 b).

4. Beweis der Äquivalenz von Forderung (I) mit der Vollständigkeit der Kanäle (8).

Wenn $\mathfrak{M}_{jk} \oplus \mathfrak{N}_{jk} \neq \mathfrak{H}$ ist, so folgt $\sum_{\gamma} \oplus \mathfrak{R}_{\gamma} \neq \mathfrak{H}$,

weil nach Konstruktion $\sum_{\gamma} \oplus \mathfrak{R}_{\gamma} \subset \mathfrak{M}_{jk} \oplus \mathfrak{N}_{jk}$.

Wenn dagegen $\mathfrak{M}_{jk} \oplus \mathfrak{N}_{jk} = \mathfrak{H}$ für jedes Paar j, k ,

so wird die Vollständigkeit der Kanäle beweisbar. Wir führen letzteren Beweis in mehreren Schritten:

A) Es sei $\Psi \in \mathfrak{N}_{jk}$. Nach Voraussetzung muß sich Ψ eindeutig zerlegen lassen in

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2, \quad \text{wo } \Psi_1 \in \mathfrak{M}_{lm}, \quad \Psi_2 \in \mathfrak{N}_{lm}$$

und l, m irgendein Teilchenpaar ist.

B) Wir behaupten zunächst, daß auch $\Psi_1 \in \mathfrak{N}_{jk}$ gilt. Dazu schätzen wir ab

$$\begin{aligned} \| D_R^{jk} e^{-iHt} \Psi_1 \| &\leq \| D_R^{jk} \{1 - D_{R'}^{lm}\} e^{-iHt} \Psi_1 \| + \| D_R^{jk} D_{R'}^{lm} e^{-iHt} \Psi_1 \| \\ &\leq \| \{1 - D_{R'}^{lm}\} e^{-iHt} \Psi_1 \| + \| D_R^{jk} D_{R'}^{lm} e^{-iHt} \Psi_2 \| + \| D_R^{jk} D_{R'}^{lm} e^{-iHt} \Psi \| \\ &\leq \| \{1 - D_{R'}^{lm}\} e^{-iHt} \Psi_1 \| + \| D_{R'}^{lm} e^{-iHt} \Psi_2 \| + \| D_R^{jk} e^{-iHt} \Psi \|. \end{aligned}$$

Benutzt man die nach (3,4) geltenden Eigenschaften der drei Summanden dieses letzten Ausdrucks, so sieht man, daß $\| D_R^{jk} e^{-iHt} \Psi \|$ mit wachsendem t gegen Null gehen muß, q.e.d.

C) Damit folgt sofort, daß auch $\Psi_2 \in \mathfrak{N}_{jk}$ gelten muß. Folglich gilt

$$\{\mathfrak{N}_{jk} \cap \mathfrak{M}_{lm}\} \oplus \{\mathfrak{N}_{jk} \cap \mathfrak{N}_{lm}\} \equiv \mathfrak{N}_{jk}.$$

D) Es sei E_{jk} der Projektionsoperator auf den Raum \mathfrak{N}_{jk} . Aus C folgt dann die Kommutativität²⁰

$$E_{jk} E_{lm} = E_{lm} E_{jk}$$

verschiedener Projektionsoperatoren. Also ist²⁰

$$\begin{aligned} E_{jk}(1 - E_{lm}) + E_{jk} E_{lm} + (1 - E_{jk})(1 - E_{lm}) \\ + (1 - E_{jk}) E_{lm} = 1 \end{aligned}$$

eine Zerlegung des Eins-Operators in vier orthogonale Projektionsoperatoren.

E) Diese Zerlegung kann nun weitergeführt werden, etwa

$$E_{jk} E_{lm} E_{ab} + E_{jk} E_{lm} (1 - E_{ab}) = E_{jk} E_{lm}$$

usf. Berücksichtigt man bei dieser Zerlegung schließlich sämtliche Paare von Nukleonen, so wird man zu der zu beweisenden Relation

$$\sum_{\gamma} \oplus \mathfrak{R}_{\gamma} = \mathfrak{H}$$

geführt. Die Relationen (5 a + b) lauten in Projektionsoperatoren geschrieben dabei

$$(1 - E_{jk})(1 - E_{kl}) \leq 1 - E_{jl},$$

$$(1 - E_{jk}) E_{kl} \leq E_{jl},$$

oder auch $(1 - E_{jk})(1 - E_{kl}) E_{jl} \equiv 0$ usf.

²⁰ Vgl. z. B. G. LUDWIG, Grundlagen der Quantenmechanik. Springer-Verlag, 1954, S. 59/60, 382.